



TITLE:

特異点の変形とVII型曲面 (特異点に関する諸問題の研究)

AUTHOR(S):

中村, 郁

CITATION:

中村, 郁. 特異点の変形とVII型曲面 (特異点に関する諸問題の研究). 数理解析研究所講究録 1978, 328: 88-95

ISSUE DATE:

1978-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104121>

RIGHT:

特異点の変形と VII 型曲面

北大 教養 中村 郁

S を 2 次元のコンパクト複素多様体とする。以下曲面と呼ぶ。曲面の分類は Enriques, Castelnuovo 等のイタリア学派, 小平邦彦等によって進められ そのかなり精密な分類が得られた。小平の分類によれば 曲面は 7 つの類 I ~ VII に分かれる。

ここで扱う VII 型曲面は $b_1 = 1$ で定義される。VII 型曲面の典型的なものに Hopf 曲面があるが それは次の様に定義される。

α, β を複素数, $|\alpha|, |\beta| > 1$ を満たすものとする。 \mathbb{C}^2 の自己同型写像 $g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ の自己同型を

$$\begin{matrix} \psi & \psi \\ (z_1, z_2) & \rightarrow (\alpha z_1, \beta z_2) \end{matrix}$$

引起し, $\{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ に固有不連続に作用し, 固定点を持たない。又コンパクトな基本領域を持つ。従って商空間 $S = (\mathbb{C}^2 - \{0\}) / g\mathbb{Z}$ $g\mathbb{Z} = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$ はコンパクトな複素多様体となるが S は位相的には $S^1 \times S^3$ と同型。従って $b_1 = 1$, 従って特に VII 型曲面である。

$C_\nu: z_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2$) は $g\mathbb{Z}$ 不変なので S 上の曲線を与える (C_ν で表わす)。 C_ν は非特異楕円曲線で C_ν の定め

る線束 $[G_p] (= F_p)$ は平坦, 即ち $F_p \in H^1(S, \mathbb{C}^*)$. dz_p は $H^0(S, \Omega^1(F_p))$ の切断を定める.

この最後の事実に関連して 井上は次の定理を証明した

定理 1 (井上, *Inventiones* 1974)

$b_1=1, b_2=0$, S 上には曲線がない,

\exists 平坦な線束 F s.t. $H^0(S, \Omega^1(F)) \neq 0$

$\Rightarrow S \cong S_M$, 又は $S_{Npqrt}^{(\pm)}$

但し $S_M, S_{Npqrt}^{(\pm)}$ は同じ論文の中で 井上の構成した新しい VII 型曲面である。ここで定理 1 の仮定の中で “曲線が存在しない” は次の定理から 当然の仮定である。

定理² (小平)

$b_1=1, b_2=0$, 曲線がある $\Rightarrow S$ は Hopf 曲面か 或る種の楕円曲面 (その構造は完全に記述される.)

ところで 最近更に Bogomolov によって次の結果が得られた。然し証明は難解で 正しいかどうかはまだ分からない。

定理³ (?) (Bogomolov)

$b_1=1, b_2=0$, 曲線がない $\Rightarrow \exists$ 平坦な線束 F s.t. $H^0(S, \Omega^1(F)) \neq 0$

そこで $b_2 > 0$ の場合が問題になるが、この場合もまた井上
 が新しい例を構成した。2種類あって、ここでは Vancouver の
 国際会議で発表されたもの S_1 、実2次数 ω に対して構成さ
 れたものを S_ω で表わす。各々基本群は \mathbb{Z} と同型で、従って
 n 次の不分岐被覆が一意的に定められる。それを $S_1^{[n]}, S_\omega^{[n]}$ 等
 によって表わすことにする。又、特別な ω に対しては S_ω
 更に位数2の自己同型 l によって商空間 $\hat{S}_\omega = S_\omega / l$ が構成さ
 れる。 $\pi(\hat{S}_\omega) = \mathbb{Z}$ となっている。 S_1 上には通常2重点を1つ
 持つ有理曲線と非特異楕円曲線、 S_ω 上には有理曲線の輪が2
 つ、 \hat{S}_ω 上には有理曲線の輪が1つあって、その他には曲線
 は存在しない。

ところで

定理⁴ (小平) 次の様な族 $\pi: Y \rightarrow D$ が存在する。

$Y_0 = \pi^{-1}(0)$: Hirzebruch 曲面の2つの切断 C_0, C_∞ ($C_0^2 = n, C_\infty^2 = -n$)
 \mathbb{Z}_n
 を同一視したもの

$Y_t = \pi^{-1}(t) (t \neq 0)$: Hopf 曲面

(但し Y は3次元複素多様体, D は1次元の半径1の円板)

定理⁵ (小田) $\pi: Y \rightarrow D$ Y は正規な3次元解析空間

で $\pi^{-1}(0)$ は有理曲面で重複曲線を持つもの, $\pi^{-1}(t) (t \neq 0)$

は S_1 , 又は S_ω , なるものが存在する。

実は一般に

補題6 X : 有理曲面 C_ν : X 上の曲線 ($\nu=1,2$)

st. $C_1 C_2 = 0$, $C_1^2 = +1$, $C_2^2 = -1$ が与えられると

$\exists \pi: Y \rightarrow D$ st. $\pi'(0) = X$ の C_1 と C_2 を同一視したもの
(C_1 と C_2 を同一視して生ずる特異点は (x, y, z) , $xy=0$ の型のものとする.) $\pi'(t)$: 非特異曲面

また更にこの時 $\pi'(t)$ は VII 型。

ところで S : Hopf 曲面とすると

S_δ : $\delta_1 < |z_1|^2 + |z_2|^2 < \delta_2$ とすれば 適当な δ_1, δ_2 に対しては $\partial^n(S_\delta) \cap S_\delta = \emptyset$ ($n \neq 0$), 従って $S_\delta \subset S$ と見做せる。更に $S - S_\delta$ は連結。このような S_δ は (即ち $S - S_\delta$ が連結) global spherical shell と呼ぶことにする (この概念は加藤昌英による) λ G.S.S. と略記する。

定理7

- (1) 補題5の $Y_t = \pi'(t)$ ($t \neq 0$) は G.S.S. を含む
- (2) 逆に G.S.S. を含む任意の S に対して, $\exists \pi: Y \rightarrow D$
st. $Y_0 = \pi'(0)$: 補題5の如く, $Y_t = \pi'(t)$: 非特異
 $Y_t \cong S$

従って特に G.S.S. を含む曲面 S は VII 型

定理8 (加藤) S_i と S_ω は G.S.S. を含む。

定理9 S は GSS を含むと仮定する

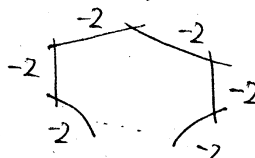

更に (1) 2つの有理曲線の輪を持てば $S \cong S_{\omega}^{[n]}$

(2) 1つの楕円曲線と1つの有理曲線の輪を持てば

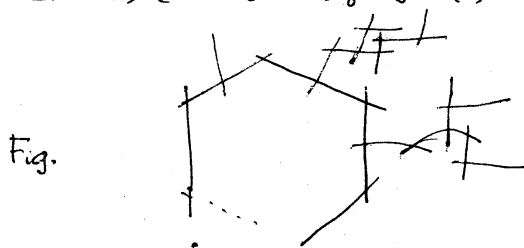
$$S \cong S_1^{[n]}$$


(3) 2つの楕円曲線を持てば Hopf 曲面

(4) 唯一つの有理曲線の輪 ^{枝のない} でその交点行列が負定値の
時は $S \cong S_{\omega}^{[n]}$ (n は奇数)

(注意) (4) に於て, 交点行列が負定値でなければ, その輪は必然的に  か又は  に限る (数字は

自己交点数) 一般に GSS を含む曲面上には b_2 個の有理曲線を持ち $S_{\omega}^{[n]}, S_1^{[n]}$, Hopf 曲面を除けば S 上の曲線はそれらで全て尽され, その台は連結である (加藤) その台は一般に輪から数本の枝が出た形をしている。(Fig.) (4) の枝のない輪というの



はこの中で  の形をしているものを指す。

定理9 は次のやや一般的な定理10, 及び定理9の特殊な場合

である定理11,12を証明することによって得られる。

定理10. S はVII型, 定数以外の有理型函数は持たないものとする。更に仮定: ある曲線 D と 平坦な線束 F_1, F_2 ($F_1 \neq F_2$) が存在して次を満たす。
(明でない)

$$(10.1) \quad \dim H^1(\mathcal{O}_D) = 2$$

$$(10.2) \quad H^0(\Omega^1(\log D)(F_\nu)) \neq 0$$

$$(10.3) \quad H^0(\Omega^1(\log D)) = 0$$

$$(10.4) \quad D \text{ の任意の連結成分 } D' \text{ に対して, } \pi_1(S-D') \cong \mathbb{Z}$$

この時 $S \cong S_\omega^{[n]}$

(注意) 定数以外の有理型函数が存在すると, S は \mathbb{P}_1 上の楕円曲面と同型, その構造は完全に分かっている。
($b_1=1$)

定理10に関連して Hopf 曲面を見直すと $S = \mathbb{C}^2 / \log/g\mathbb{Z}$ 上には $\omega_1 = \frac{dz_1}{z_1}, \omega_2 = \frac{dz_2}{z_2}$, $\omega_\nu \in H^0(\Omega^1(\log D))$ $D = C_1 + C_2$

$$H^1(\mathcal{O}_D) \cong H^1(\mathcal{O}_{C_1}) \oplus H^1(\mathcal{O}_{C_2}) = \mathbb{C}^2$$

定理10の(10.1), (10.2) が少し形を変えて成立していると思われることができる。実際この場合には次の定理が成立つ。

定理 S VII型, $\exists D$ 曲線 s.t. $\dim H^1(\mathcal{O}_D) = 2$,

$$\dim H^0(\Omega^1(\log D)) = 2 \quad \Rightarrow \quad S: \text{Hopf 曲面}$$

定理9の特別な場合として \mathbb{R}^2 のある種の分割 Δ とそれに作用する整数係数アフィン変換 g に対して 補題6の様な族 \mathcal{Y} が

torus embedding を用いて構成される。(これは定理 5 で示された小田の方法の一般化である) g の線型部分を $\text{Lin } g$, そのトレースを $\text{Tr } g$ で表わすことにすると,

定理 11 $\det \text{Lin } g = 1$ の時, いつも $\text{Tr } g \geq 2$ が成立,

$$\text{Tr } g = 2 \text{ とすると } \text{Lin } g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y_t : \text{Hopf}$$

$$\text{Lin } g \sim \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (非役)} \Rightarrow Y_t \cong S_1^{[n]} \\ * \neq 0$$

$$\text{Tr } g > 2 \text{ とすると } Y_t \cong S_\omega^{[n]} \quad \text{但し } \omega \text{ は } \text{Lin } g \text{ の固有値}$$

定理 12 $\det \text{Lin } g = -1$ の時

$$\text{Tr } g = 0 \Rightarrow Y_t : \text{Hopf}$$

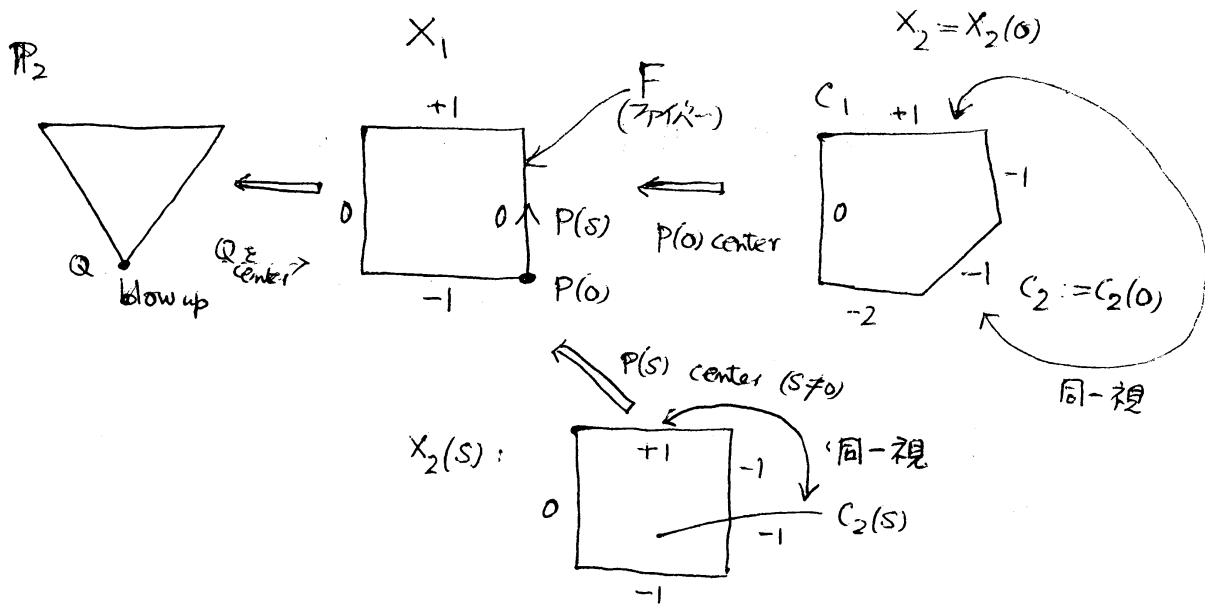
$$\text{Tr } g \neq 0 \Rightarrow Y_t \cong \hat{S}_\omega^{[n]} \quad (n: \text{奇数}) \quad \text{但し } \omega \text{ は } (\text{Lin } g)^2 \text{ の固有値}$$

$$\text{(注意)} \quad \hat{S}_\omega^{[n]} \quad (n: \text{偶数}) \cong S_\omega^{[\frac{n}{2}]}$$

定理 13 (加藤)

$S \supset G.S.S.$ とすければ S の微小変形 S_t で Hopf 曲面から有限回のモノイダル変換で得られるものがある。

この定理は補題 6 の考え方を (定理 7) 用いて 次の様にも証明できる。本質的には同じ議論なので、例で見よう。



定理7の X として X_2 をとると C_1 と C_2 を適当に同一視した時 Y_t ($t \neq 0$) は S_1 と同型になる。 $X_2 = X_2^{(0)}$ は $X_1 = \Sigma_1$ (Hirzebruch 曲面) ファイバー F に沿って blow up の center $P(s)$ を平行移動することにより $X_2(s)$ $|s| < \varepsilon$ に変形される。この時 適当に $C_1 \subset C_2(s)$ ($=Q_{P(s)}(P(s))$) を同一視して $Y_0 = \bigcup_{|s| < \varepsilon} X_2(s) / C_1 = C_2(s)$ という特異曲面の族を構成する。更にこの時

$\pi: \tilde{Y} \rightarrow D \times D$ 平坦な族 st $\tilde{Y}|_{0 \times D} = Y_0$, $\tilde{Y}|_{D \times 0} = Y$ なるものが構成される。 $\tilde{Y}|_{D \times s}$ ($s \neq 0$) は $X_2(s) / C_1 = C_2(s)$ を原点上のファイバーとする族になるが、容易に分かる様に $X_2(s) / C_1 = C_2(s)$ は (適当に座標を変換して) Σ_1 の2つの切断 C_0 C_∞ $C_0^2 = +1$, $C_\infty^2 = -1$ を同一視し C_0, C_∞ 上にない点で1回モノイダル変換したもの到他ならない。従って

定理3 (に関連した結果)より, $\tilde{Y}_{t \times s}$ は Hopf 曲面の1回モノイ

ダル変換と同型 (証終) — 8 —

$\tilde{Y}|_{D \times D}$ は通常の変形族なので $\tilde{Y}_{t \times s}$ は $\tilde{Y}_{t \times 0}$ の変形